

УДК 51-76:630

ЛОГІСТИЧНА ТА ПОКАЗНИКОВА КРИВІ В МОДЕЛЯХ ЕКОСИСТЕМ

О. Е. Корнійчук,

доцент, к.пед.н.,

Житомирський агротехнічний коледж

Теорія звичайних диференціальних рівнянь є одним з основних інструментів математичного природознавства. Диференціальні рівняння активно використовуються для побудови найрізноманітніших моделей – фізичних, економічних, біологічних, географічних, екологічних, геологічних і багатьох інших. Тому математична освіта фахівця будь-якої природознавчої спеціальності не може обійтись без введення в курс диференціальних рівнянь. Метою вивчення цього курсу є математичне моделювання. Навчання методам розв'язування та огляд прикладів застосування диференціальних рівнянь є пропедевтикою моделювання і прогнозування стану довкілля, методів оптимізації тощо.

У статті подано методичні рекомендації щодо вивчення реальних математичних моделей на заняттях з вищої математики для студентів спеціальності «Лісове господарство». Розглянуто диференціальні моделі процесу природного руйнування деревостанів, моделі експлуатованої популяції та промислового відстрілу. Побудову розв'язків рівнянь – показникової та логістичної кривих – виконано за допомогою засобу GRAN.

Ключові слова: диференціальне рівняння, математичне моделювання, показникова крива, логістична крива, лісове господарство, мисливство.

The theory of ordinary differential equations is one of basic tools of mathematical natural science. Differential equations are widely used to build a variety of models—physical, economic, biological, geographical, ecological, geological and many others. Therefore, mathematical education for a specialist in any natural science activity cannot do without an introduction to the course differential equations. Mathematical modeling is the goal of this course studying. The study of methods for solving and overview of applications of differential equations is propaedeutics in modeling and forecasting of the state of the environment, for optimization methods and so on.

The article presents methodological recommendations for studying real mathematical models during the training of higher mathematics for the students of specialty «Forestry». The article deals differential models for the process of natural destruction of trees, models of the exploited animal population and industrial slaughter. Construction of solutions of equations – exponential and logistic curves – is done using GRAN.

Key words: differential equations, mathematical modeling, exponential curve, logistic curve, forestry, hunting.

Постановка проблеми.

Вивчення диференціальних рівнянь у курсі вищої математики в основному орієнтується на формальне розв'язування стандартних типів рівнянь. При цьому значну частину складають систематичні методи пошуку розв'язку. Студенти концентруються на запам'ятовуванні та застосуванні цих методів для знайомих типів рівнянь. Нові вимоги до вищої освіти вимагають впровадження розвиваючих технологій навчання, перегляду змісту математичної освіти з точки зору її професійного спрямування.

Такі потужні системи комп'ютерної алгебри, як Maple, Mathematica, MATLAB, а також навчальні середовища, як MathCAD, Derive, GRAN, змінюють уявлення про диференціальні рівняння, їх роль та можливості застосувань у науці та інженерній справі. Нова технологія мотивує і дозволяє використовувати як обчислення, так і засоби графічної візуалізації для поглибленого розуміння концепцій, сутності задач, трактовки моделей і розв'язків.

Матеріал, представлений у даних напрацюваннях, дозволить викладачам розширити діапазон реальних застосувань вищої математики, а студентам – поглибити теоретичні знання та на початковому етапі навчання у ВНЗ отримати певні навички математичного моделювання у лісовідновлювальній, лісосічній справі, у задачах мисливського менеджменту, що є необхідним для вивчення спеціальних дисциплін, сприяє підвищенню рівня підготовки майбутніх фахівців, а саме інженерів у галузі лісового господарства, їх конкурентоспроможності на ринку праці.

Аналіз досліджень.

Питання професійно орієнтованого підходу та мотивації у методичній системі навчання вищої математики, їх впровадження у практику професійної підготовки студентів економічних та технічних спеціальностей підіймаються у багатьох роботах автора [3-21 та ін.]. Майбутнім фахівцям необхідно мати чітке уявлення про практичні можливості використання математичних методів та комп'ютерних технологій у сфері своєї професійної діяльності. Такий підхід сприяє інтегративності та цілісності підготовки студентів, формуванню особистості, її моральних якостей, професійної компетентності та мобільності у прийнятті ефективних рішень, розвитку системно-аналітичного мислення та креативності у вирішенні професійних завдань.

Мета статті: запропонувати методику доволі раннього вступу до математичного моделювання на заняттях з вищої математики за допомогою побудови і дослідження реальних диференціальних моделей у задачах менеджменту лісового та мисливського господарства.

Виклад основного матеріалу.

Для ґрунтового аналізу і планування лісогосподарської та мисливської діяльності поряд з традиційними методами, які базуються на вихідних статистичних даних, ефективним й перспективним напрямом виступає математичне моделювання природних процесів. Лінійна статистична модель достатньою мірою не забезпечує вимоги лісових екосистем. Побудова і дослідження нелінійних, динамічних моделей давно й успішно впроваджується у зарубіжній практиці ведення господарства – для прогнозування та знаходження оптимальних методів і стратегій лісокористування та мисливства.

В окремих випадках математичне моделювання лісівничих процесів є єдино можливим та оптимальним методом дослідження і управління. Динаміка лісово-

го фонду, процеси зростання деревостанів або їхнього руйнування природним шляхом чи внаслідок антропогенних, зовнішніх впливів, вироблення підходів щодо якісної оцінки і прогнозування життєвості лісових екосистем у разі дії на них чинників живої та неживої природи, а також людської діяльності, є типовими прикладами тих питань, коли не можна обійтись без застосування математичних моделей [2].

Після конспективного ознайомлення студентів з диференціальними рівняннями першого порядку та невеликим охопленням деяких традиційних методів їх розв'язання студентам можна запропонувати *диференціальні моделі* процесу природного руйнування деревостанів.

Модель 1: *руйнування деревостанів внаслідок буревію*. Побудуємо диференціальну модель впливу буревію на ділянку лісу. Вітер, пройшовши крізь ліс, зазнає опору дерев, внаслідок чого втрачає частину своєї швидкості. На дуже короткому проміжку шляху ця втрачена швидкість пропорційна довжині цього проміжку й швидкості на початку шляху. Нехай на відстані x від початку лісових насаджень швидкість вітру становитиме V . Тоді $(-dV)$ – втрачена швидкість на ділянці лісу dx (процес спадання швидкості). Вважаючи, що втрачена швидкість $(-dV)$ пропорційна dx й V , таку залежність можна подати у вигляді диференціального рівняння (1):

$$-dV = kVdx \quad \text{або} \quad -\frac{dV}{V} = kdx, \quad (1)$$

де k – певний безрозмірний коефіцієнт.

Знаходимо загальний інтеграл цього рівняння:

$$-\int \frac{dV}{V} = \int kdx, \quad -\ln|V| = kx + C, \quad V = \pm e^{-kx-C} = \pm e^{-C} \cdot e^{-kx}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння:

$$V = Be^{-kx} \quad (B = \pm e^{-C}).$$

Припускаючи, що за початкових умов $x = 0$, $V = V_0$, отримаємо:

$$V = Be^0, \quad V = V_0 = B.$$

Звідси частинний розв'язок: $V = V_0 e^{-kx}$.

Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з додаткової умови задачі.

Нехай для $x = 1$ м, швидкість вітру була V_1 , тобто $V_1 = V_0 e^{-k}$.

$$\text{Тоді } k = -\frac{\ln V_1}{V_0} \text{ і закон зміни швидкості матиме вигляд: } V = V_0 e^{\frac{\ln V_1}{V_0} x}.$$

Унаочнення зміни швидкості вітру при $V_0 = 30$ м/с і $V_1 = 29,5$ м/с представлено на рисунку 1, який створено у середовищі GRAN1.

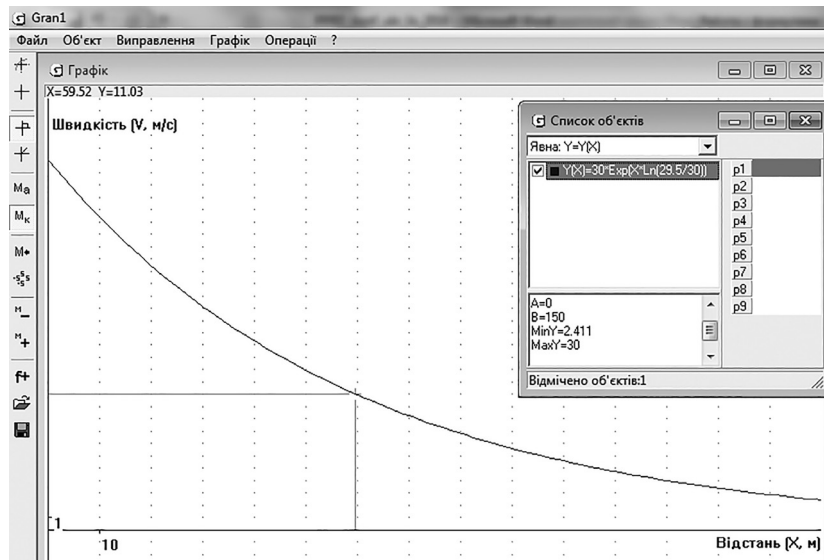


Рис. 1. Динаміка швидкості вітру

Зауважимо, що диференціальне рівняння (1) вигляду $y' = ky$ () називають рівнянням *показникового зростання* або математичною моделлю природного приросту.

Розв'язком цього рівняння є експоненціальна (показникова) функція $y = y_0 e^{kt}$, де y_0 – початкова кількість об'єкту дослідження, k – коефіцієнт приросту і $k \approx \frac{\Delta y}{y}$, коли відносний приріст досить малий (Δy – приріст за достатньо малу одиницю часу Δt). Якщо приріст задано у відсотках $p\%$ то $k \approx \frac{p}{100}$. При $k > 0$ кількість збільшується, при $k < 0$ – зменшується.

Криву, рівняння якої $y(t) = a \cdot e^{kt}$, називають *показниковою кривою*. Позначивши $b = e^k$, рівняння цієї кривої можна записати як $y(t) = a \cdot b^t$. При $b > 1$ $y(t)$ зростає, а при $0 < b < 1$ – спадає із зростанням t (рис.1). Параметр a характеризує початкові умови, а параметр b – сталий темп зростання.

Рівняння та криві такого вигляду описують процеси радіоактивного розпаду, зростання чисельності народонаселення, динаміку зростання цін в умовах інфляції тощо.

Модель 2: природне відмирання дерев. Нехай на певній ділянці лісового масиву маємо $m(t)$ – середню кількість дерев у момент часу t і в станах А та В. До стану А зараховуємо дерева здорові, а до стану В – ослаблі та сильно ослаблі. Очевидно, швидкість зміни стану дерев $m(t)$ у часі можна задати диференціальним рівнянням:

$$\frac{dm}{dt} = A - B.$$

Припускаючи, що $A = am$, $B = bm$, отримаємо

$$\frac{dm}{dt} = m(a - b).$$

де a , b – коефіцієнти росту відповідно до здорових та відмираючих дерев за одиницю часу.

Вважаючи, що у момент часу $t = t_0$, кількість здорових дерев $m = m_0$, маємо показникову модель вигляду:

$$m(t) = m_0 e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

З цього розв'язку випливає, якщо $a > b$ і $t \rightarrow \infty$, то кількість здорових дерев $m \rightarrow \infty$. Якщо ж $a < b$ і $t \rightarrow \infty$, то кількість здорових дерев $m \rightarrow 0$, тобто буде відмирати весь масив.

Тут наведено достатньо просту модель, яка, насправді, дуже наближено відображає дійсність. Практично усі моделі, які описують реальні явища і процеси, за своєю будовою є нелінійними.

Модель 3. Розглянемо нелінійну модель процесу відмирання дерев у вигляді диференціального рівняння $\frac{dm}{dt} = am - bm^2$, розв'язок якого подається так

званою

$$m(t) = \frac{m_0 \cdot \frac{a}{b} \cdot e^{a(t-t_0)}}{m_0 \cdot e^{a(t-t_0)} + \left(\frac{a}{b} - m_0\right)}$$

логістичною кривою.

За цією моделлю при $t \rightarrow \infty$ масив $m \rightarrow \frac{a}{b}$. Природно, що $a > b$, і така модель може більш реально відображати картину досліджуваного процесу.

Математичне моделювання різних аспектів функціонування деревостанів та лісових екосистем дає змогу достовірніше прогнозувати їх продуктивність та захист. Під час вирішення лісовпорядкувальних задач побудова математичних моделей, у більшості випадків, має наближений характер: дерево, як і будь-яка рослина, є біологічним об'єктом. Але ці моделі є необхідними задля раціонального ведення лісового господарства та оптимізації заходів керування процесом експлуатації лісів.

Елементарний об'єкт мисливського господарства – популяції тварин. Управління популяціями – це система взаємопов'язаних заходів, спрямованих на охорону, відтворення та раціональне використання ресурсів тварин, а також отримання максимуму продукції при мінімізації нанесення шкоди навколишньому середовищу і самим популяціям.

Розглянемо модель популяції, наприклад, косуль, для якої має проводитись промисловий відстріл.

Модель 4: модель експлуатованої популяції. Нехай динаміка чисельності косуль у лісі за відсутності антропогенного втручання описується логістичним рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x), \quad (2)$$

де $x = x(t)$ – чисельність популяції у лісі в момент часу t (чисельність вимірюється у сотнях, а час у роках).

Знайти залежність $x(t)$, якщо початкова чисельність $x(0) = 0,8$ (сотні), $k = 2$ (k - коефіцієнт, який враховує показники народжуваності та смертності у межах популяції), гранична чисельність популяції $M = 4$ (сотні).

Розв'язання.

$$\frac{dx}{dt} = 2x(4-x) \Rightarrow \frac{dx}{4x-x^2} = 2dt \Rightarrow \int \frac{dx}{(x-2)^2 - 2^2} = -2 \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-4}{x} \right| = -2t + C_1 \Rightarrow \frac{x-4}{x} = Ce^{-8t}, \quad \text{де } C = \pm e^{4C_1}.$$

Оскільки $Q(0) = 0,8$, то $C = \frac{-3,2}{0,8} = -4$, тоді $1 - \frac{4}{Q} = -4e^{-8t} \Rightarrow$

$$Q = \frac{4}{1 + 4e^{-8t}}.$$

Графік отриманої функції побудовано у GRAN1 (рис. 2). Ця S-подібна крива називається *логістичною кривою (або кривою Перла-Ріда)*.

Логістична крива – це графік функції, яка має вигляд $y(t) = \frac{m}{1 + be^{-at}}$, де a і b – додатні параметри, m – граничне значення функції при $t \rightarrow +\infty$. Ця крива має точку симетрії, що збігається з точкою перегину.

Зауважимо, що у рівнянні (2) значення M іноді називають *потенціальною ємністю екологічної системи*, припускаючи, що вона дорівнює максимальній чисельності популяції, яку середовище може підтримувати тривалий час.

Логістичні моделі також описують процес розповсюдження рекламних повідомлень, динаміку епідемій, процес розмножування бактерій в обмеженому середовищі тощо.

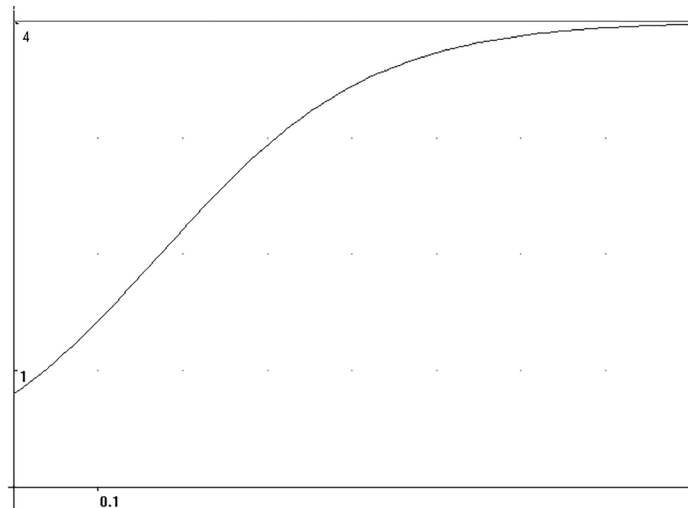


Рис. 2. Логістична крива

Продовжуючи постановку задачі, припускаємо, що проводиться промисловий відстріл косуль. За умови, що швидкість відстрілу постійна і дорівнює h , необхідно записати рівняння відстрілу та виконати аналіз динаміки популяції в залежності від швидкості відстрілу.

Отримаємо диференціальне рівняння, яке описує логістичну популяцію «зі збором врожаю»:

$$\frac{dx}{dt} = 2(4-x)x - h,$$

розв'язуючи яке, можна знайти і дати обґрунтування обсягу квоти на відстріл для даної популяції.

Зрозуміло, що безмежне нарощування чисельності, особливо при мізерних запасах зимового корму, також шкідливе і неприпустиме, як і необмежений видобуток звірів. «Основний принцип ведення мисливського господарства – запаси основних видів повинні доводитися до оптимального рівня і підтримуватися на ньому» [1, с. 228]. Такий підхід вимагає невпинної праці, наявності реальних статистичних даних, ґрунтовних знань та впроваджень методів математичного моделювання.

Не зайвими та цікавими для розвитку й виховання студентів, а також для підвищення мотивації навчання будуть відомості про те, що логістична модель була запропонована у 1798 році відомим англійським демографом та економістом Мальтусом у його класичній праці *«Про закон зростання народонаселення»* [7, с. 7]. Томас Роберт Мальтус (1766-1834) звернув увагу на той факт, що чисельність популяції зростає за експонентою (у геометричній прогресії), у той час, як виробництво продуктів харчування зростає з часом лінійно (у арифметичній прогресії). Відповідно до цього він зробив справедливий висновок про те, що рано чи пізно експонента обов'язково «випередить» лінійну функцію і настане голод. На підставі цих висновків Мальтус говорив про необхідність введення обмежень на народжуваність, особливо для найбідніших верств суспільства.

Дарвін, аналізуючи важливість відкриття Мальтуса для популяційної динаміки, наголосив: оскільки жодна популяція не розмножується до нескінченності, повинні існувати чинники, які перешкоджають такому необмеженому розмноженню.

Висновки.

Демонстрація моделей прикладних задач та застосувань диференціальних рівнянь спонукає студентів до самостійної роботи, до поглибленого вивчення математичних методів, до побудови і досліджень моделей у різних галузях знань – як природничо-наукових (механіка, фізика, хімія, біологія), так і гуманітарних (соціологія, статистика).

Працюючи за навчальними експрес-планами, із щорічним зменшенням до критичного мінімуму аудиторних занять з математичних дисциплін, викладачам все ж необхідно ознайомлювати студентів з тими концептуальними перспективами, які їм стануть у нагоді для використання диференціальних рівнянь у подальшій професійній діяльності та навчанні.

Бібліографія

1. Данилкин А. А. Косули (биологические основы управления ресурсами) / А. А. Данилкин. – М.: Товарищество научных изданий КМК, 2014. – 316 с.
2. Думанський О. І. Диференційні моделі у задачах лісового господарства / О. І. Думанський, Ю. М. Дебринюк // Наукові праці Лісівничої академії наук України : збірник наук. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України, 2008. – Вип. 6. – С. 170-174.
3. Корнійчук О. Е. Мотиваційні детермінанти в структурі методичної системи навчання математики для економістів / О. Е. Корнійчук // Теорія та методика на-

вчання математики, фізики, інформатики: зб. наук. пр. – Кривий Ріг: НМА України, 2008. – Вип. 7, т. 1.: Теорія та методика навч. математики. – С. 61-66.

4. Корнійчук О. Мотивація в системі навчання математичних дисциплін / О. Корнійчук // Витоки педагогічної майстерності. Сер. Педагогічні науки. – Полтава : ПНПУ ім. В. Г. Короленка, 2012. – Вип. 10. – С. 144-148.

5. Корнійчук О. Е. Математика як складова в розвитку мислення сучасного економіста / О.Е. Корнійчук // Педагогіка і психологія. – К: НАПН України, 2007. – № 1. – С. 70-78.

6. Корнійчук О. Е. GRAN–ілюстрація та прогностні обчислення еколого-економічної моделі / О. Е. Корнійчук // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. № 2. Комп'ютерно орієнтовані системи навчання. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. – Вип. 5 (12). – С. 131-136.

7. Корнійчук О. Е. Етичні аспекти економічного мислення / О. Е. Корнійчук // Актуальні проблеми економіки. – 2005. – № 6 (48). – С. 3–14.

8. Корнійчук О. Е. Напрямки інтеграції математики з інформатикою у процесі підготовки молодших спеціалістів економічного профілю / О. Е. Корнійчук, В. М. Єрмаков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 6. – С. 16-19.

9. Корнійчук О. Е. Комп'ютерні технології у вивченні математики для економістів / О. Е. Корнійчук, В. М. Єрмаков // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 8. – С. 16-18.

10. Корнійчук О. Е. Математичні моделі в економічних розрахунках на базі MathCad/ О. Е. Корнійчук // Математика в школі. – 2006 - № 6. – С. 35-41.

11. Корнійчук О. Е. Новітні методи і прийоми навчання математичного моделювання та дослідження організації виробництва / О. Е. Корнійчук // Освіта та пед. наука. – Луганськ : ЛНПУ ім. Т. Шевченка, 2012. – № 3 (152). – С. 54-61.

12. Корнійчук О. Е. Застосування вищої математики до розв'язання актуальних питань з проблеми екологізації економіки / О. Е. Корнійчук // Проблеми та перспективи наук в умовах глобалізації: матеріали VI Всеукр. наук. конф., 15 груд. 2010 р. – Тернопіль : ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2010. – Ч. I.: Педагогіка, психологія, суспільствознавство, мовознавство. – С. 24-30.

13. Корнійчук О. Е. Методи інтегрального числення та GRAN-застосування для розв'язування задач економічного змісту / О. Е. Корнійчук // Комп'ютер у школі та сім'ї. – К.: Інститут педагогіки НАПН України; Інститут інф. технологій і засобів навчання НАПН України, 2012. – № 8 (104). – С. 12-16.

14. Корнійчук О. Е. Професійно орієнтований тренінг у формуванні математичних компетентностей інженерів еколого-природознавчого напрямку / О. Е. Корнійчук // Гуманітарний вісник ДВНЗ «ПХДПУ ім. Г. Сковороди». Сер. Педагогіка. Психологія. Філософія. – 2013. – Вип. 28, т. 2. – С. 439-445.

15. Корнійчук О. Е. Взаємодія між дисциплінами фундаментальної і професійної підготовки в процесі вивчення компонент інтелектуальної системи / О. Е. Корнійчук, Є. Ю. Тімченко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – К.: Ін-т педагогіки; Ін-т інформ. техн. і засобів навч. НАПН України, 2012. – № 7 (103). – С. 15-19.

16. Корнійчук О. Система Maple в процесі навчання методам диференціального числення / О. Корнійчук // Інформаційні технології в професійній діяльності: матеріали VI Всеукр. наук.-практ. конф., 28 берез. 2012 р. – Рівне: РДГУ, 2012. – С. 28-30.

17. Корнійчук О. Е. Формування професійного інтелекту в процесі моделювання систем штучного інтелекту / О. Е. Корнійчук // Зб. наук. праць КПНУ ім. І. Огієнка. Сер. педагогічна. – Кам'янець-Подільський: КПНУ ім. І. Огієнка, 2014. – Вип. 20. – С. 90-93.

18. Корнійчук О. Е. Пропедевтика математичного моделювання в курсі вищої математики / О. Е. Корнійчук // Сб. научных трудов межд. конф. «Современные инновационные технологии подготовки инженерных кадров для горной промышленности и транспорта 2016». – Д., ГВУЗ «НГУ», 2016. – С. 431-440.

19. Корнійчук О. Е. Вивчення похідної разом із Maple / О.Е. Корнійчук // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Вип. 3(9). – С. 61-69.

20. Корнійчук О. Е. Графічне трактування лінійних програм засобом GRAN / О. Е. Корнійчук // Сб. научных трудов междун. конф. «Современные инновационные технологии подготовки инж. кадров для горной промышленности и транспорта 2017». – Днепр, Национальный горный университет, 2017. – С. 568-575.

21. Корнійчук О. Е. Візуалізація екстремальних значень лінійної форми // Фізико-математична освіта: науковий журнал. – 2017. – Вип. 3(13). – С. 72-77.